درس چهارم : عمل یک گروه روی یک مجموعه

۱ مقدمه

درزندگی روزمره اغلب از لفظ تقارن استفاده می کنیم. می گوییم که یک گل ، یک منظره،یک مجسمه و یا یک ساختمان متقارن است و دیگری نیست. یایکی تقارن بیشتری نسبت به دیگری دارد. درتوصیف دقیق طبیعت آنچنان که درفیزیک با آن روبرو هستیم تقارن نقش مهم تر و بنیادی تری ایفا می کند و اثر آن تنها یک اثر زیبایی شناسی نیست. درسطوح مختلف طبیعت به تقارن های متعدد و متفاوت برمی خوریم. فضای سه بعدی مطلق یعنی فضای خالی دارای تقارن انتقالی و دورانی است یا به عبارت بهتر قوانین طبیعت نسبت به انتقال و دوران درفضای سه بعدی یکسان هستند. تکرار یک آزمایش دریک نقطه همان نتایجی را بدست می دهد که درنقطه دیگر و یادرجهت دیگر. این یک خاصیت بنیادی و مهم فضاست. فضا زمان چهاربعدی تقارن های بازهم بیشترو عمیق تری دارد. قوانین طبیعت دردستگاه های لختی که نسبت به یکدیگر درحال حرکت مستقیم الخط یکنواخت هستند یکسان هستند وبه همین جهت با هیچ آزمایش فیزیکی و بامشاهده هیچ پدیده طبیعی نمی توانیم ازحرکت دستگاه لختی که برآن سوار هستیم آگاه شویم. اطمینان ما به این تقارن ها چنان است که ازآنها به عنوان محکی برای سنجیدن درستی قوانین جدیدی که می خواهیم برای پدیده های ناشناخته وضع کنیم استفاده می کنیم و آن دسته از قوانین را که با این تقارن ها سازگارنباشند درهمان مرحله اول کنارمی گذاریم.
تقارن قوانین فیزیکی تنها یک خاصیت انتزاعی نیست بلکه این تقارن ها باعث می شوند که اشیای فیزیکی ای که لاجرم تحت تسلط این قوانین هستند به نوبه خود تقارن هایی پیداکنند. یک ستاره که ازتراکم گازهای درون کهکشانی بوجودمی آید دراثر تقارن دورانی خود به شکل یک کره درمی آید و نه مثلا به صورت یک بیضی گون. حالت پایه اتم هیدروژن نیز یک شکل کروی دارد و شکل دیگر اربیتال ها نیز تقارن های مخصوص به خود دارند. از پیوند اتم ها مولکول هایی با تقارن های مختلف بوجود می آید. تقارن انتقالی باعث می شود که بلور ها از تکرار سلول های یکسانی درفضا ایجاد شوند. قیودی که ناشی از سازگاری تقارن های انتقالی برای یک بلور و تقارن های سلول واحد آن است، باعث می شود که تنها بلورهایی با شکل های معین درطبیعت یافت شوند. این تقارن نهایتاً به ابعاد ماکروسکوپی و به دنیای گل ها و پروانه ها راه می یابد.
درسطح عمیق تر و میکروسکوپی تر تقارن های دیگری وجود دارند که براستی شگفت انگیزند. این تقارن ها مثل تقارن های یک گلبرگ و یا یک شکل هندسی ساده ملموس نیستند. بااین وجود به همان معنادقیق هستندو اثرات فیزیکی مهم دارند. به عنوان مثال نیروی هسته ای قوی نسبت به تعویض پروتون و نوترون کاملاً متقارن است. این تقارن یک تقارن گسسته است که باگروه Z_2 توصیف می شود. می توانیم بگوییم که نیروی هسته ای قوی تنها روی یک هستک اثر می کند واین هستک می تواند دریکی از دوحالت که آن را پروتون و یانوترون می گوییم قرارگیرد درست مثل اسپین الکترون که می تواند دریکی از دو حالت بالا یا پایین قرارگیرد. به همین علت این تقارن را تقارن ایزواسپین می گوییم.

اما ازانجا که مکانیک کوانتومی به ما آموخته است که حالات فیزیکی یک ذره با بردارهای یک فضای خطی متناظرهستند می توانیم بگوییم که یک هستک می تواند دریک حالت دلخواه $|\phi\rangle = a|proton\rangle + b|neutron\rangle$ قرارگیرد. درنتیجه حالت یک هستک که با یک برداردوتایی $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ توصیف می شود می تواند تحت تبدیلات گسترده تری مثل تبدیلات $U(2)$ قرار بگیرد بدون اینکه نیروی هسته ای قوی متوجه این تغییرات بشود. درنتیجه تقارن ایزواسپین با گروه $U(2)$ توصیف می شود. دراینجا برای اولین بارباتقارنی مواجه می شویم که تقارن فضا یا فضازمان ملموس نیست بلکه تقارن یک فضای مجرد و درونی مربوط به ذرات موسوم به فضای ایزواسپین است . این تقارن تنها تقارنی نیست که دردنیای ذرات وجود دارد و فضای ایزواسپین نیز تنها فضای درونی مربوط به ذرات نیست. دردنیای میکروسکوپی باتقارن هایی مواجه می شویم مثل تقارن رنگ و یا تقارن پیمانه ای . توصیف دقیق این تقارن هانیاز به حداقلی از دانش ذرات بنیادی دارد و درمحدوده این درس نیست. بااین وجود ما دراین فصل سعی خواهیم کرد که مفهوم کلی ودقیق تقارن را شرح دهیم. مطالب این فصل زیربنایی برای دانشی خواهد بود که دانشجو دردرس های دیگر درمورد تقارن به صورت های خاص دنبال خواهد کرد.

۲ تعاریف اساسی و مثال ها

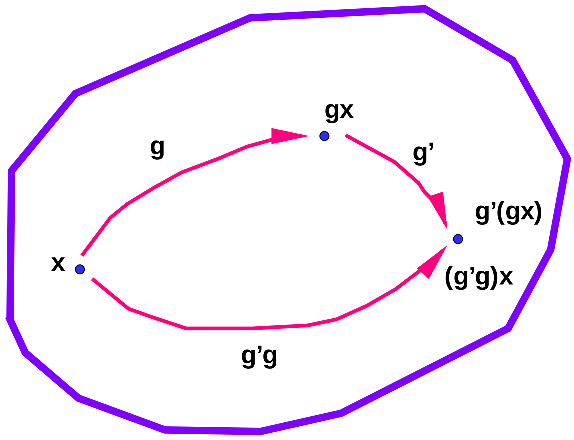
۱ − تعریف :یک گروه G روی یک مجموعه M یک گروه تبدیلات روی M نامیده می شود هرگاه یک نگاشت $\phi : G \times M \longrightarrow G$ بتوان یافت که شرایط زیر را داشته باشد:

$$\phi(e, x) = x \qquad \phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x). \tag{1}$$

اثر ϕ روی زوج (g, x) را با x' نشان می دهیم و می نویسیم $x' = \phi(g, x)$. x' نقطه جدیدی از M است. دررابطه $x' = \phi(g, x)$ هرگاه g را ثابت بگیریم و تنها x را تغییر دهیم x' به تبع آن تغییر می کند. درواقع مثل این است که نگاشتی داریم از M به خود M که بستگی به g دارد. برای این که این موضوع را به وضوح نشان دهیم رابطه $x' := \phi(g, x)$ را به شکل $x' = \phi_g(x)$ می نویسیم . این رابطه با صراحت بیان می کند که به ازای هر $g \in G$ یک نگاشت $\phi_g : M \longrightarrow M$ داریم که با تصویری که ما به طور شهودی از اثر یک عنصر گروه روی یک مجموعه داریم وفق می دهد. ϕ_g را تبدیل وابسته به عنصر g روی مجموعه M می گوییم. با این نوع نوشتن رابطه نخست این فصل را می توان به صورت معادل زیرنوشت:

$$\phi_e(x) = x, \qquad \phi_g \phi_{g'} = \phi_{gg'}. \tag{2}$$

گاهی اوقات $\phi_g(x)$ را به صورت خلاصه تر gx می نویسیم ولی باید به یاد داشته باشیم که این عبارت به معنای ضرب g در x نیست.



شکل ۱: عمل یک گروه تبدیل روی یک مجموعه.

معنای رابطه (2) را به بهترین وجه درشکل (۲) می توان فهیمد. دراین شکل نقطه $x \in M$ نخست توسط $g \in G$ به نقطه gx نگاشته می شود و سپس این نقطه به نوبه خود توسط $g' \in G$ به نقطه $g'(gx)$ نگاشته می شود. اگر عمل گروه روی مجموعه M چنان باشد که نقطه $x \in M$ توسط $g'g \in G$ به همین نقطه آخر نگاشته شود، آنگاه می گوییم که گروه G یک گروه تبدیلات روی M است.

مثال ۱ : عمل گروه Z_2 روی یک خط:
دراین مثال داریم $M = R$ و $G = \{e, I\}$ با تبدیلات زیر:

$$\phi_e(x) := x, \phi_I(x) := -x. \tag{3}$$

براحتی دیده می شود که G یک گروه تبدیلات روی M است.

مثال ۲ : عمل گروه $G := \{e, I_x, I_y, I_o\}$ روی صفحه دوبعدی .

دراین مثال داریم $M = R^2$. e نگاشت همانی ، I_x و I_y به ترتیب انعکاس نسبت به محور های x و y و I_o انعکاس نسبت به مبداء مختصات است. به عبارت دیگر به ازای هرنقطه $(u, v) \in R$:

$$I_x(u, v) := (u, -v), \qquad I_y(u, v) = (-u, v), \qquad I_o(u, v) = (-u, -v). \tag{4}$$

مثال ۳ : عمل گروه انتقال روی فضای اقلیدسی:

$M = R^3$ و $G := \{a|a \in R^3\}$. عمل G روی M دراین جا به شکل زیرتعریف می شود:

$$\phi_a : R^3 \longrightarrow R^3, \qquad \phi_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{x} := \overrightarrow{x+a}. \tag{5}$$

براحتی دیده می شود که $T_{\overrightarrow{a}} T_{\overrightarrow{a'}} = T_{\overrightarrow{a+a'}}$.

مثال ۴: عمل گروه تغییر مقیاس روی فضای اقلیدسی:

$M = R^3$ و $G := \{\lambda|\lambda > 0\}$. نگاشت های درون G به شکل زیرتعریف می شوند:

$$\phi_\lambda : R^3 \longrightarrow R^3, \qquad \phi_\lambda(x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \tag{6}$$

دیده می شود که $\phi_\lambda \phi_{\lambda'} = \phi_{\lambda\lambda'}$.

مثال ۴ :عمل گروه $SO(2)$ روی فضای دوبعدی :
داریم: $M = R^2$ و $G = SO(2)$. یادآوری می کنیم که $SO(2)$ گروه ماتریس های دوبعدی متعامد با دترمینان یک است. این گروه را می توان به شکل زیر پارامتریزه کرد:

$$SO(2) := \{g = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}. \tag{7}$$

عمل $g \in SO(2)$ روی $r \in R^2$f به صورت زیر تعریف می شود:

$$r \longrightarrow r' \equiv= gr. \tag{8}$$

بنابراین دراین مثال $\phi_g(r) = gr$. واضح است که شرط $\phi_g \phi_{g'} = \phi_{gg'}$ برآورده می شود.
هرگاه r و r' را برحسب مولفه هایشان بنویسیم بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} x' &= \cos\theta\, x + \sin\theta\, y \\ y' &= -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y. \end{aligned} \tag{9}$$

این رابطه بوضوح نشان می دهد که $SO(2)$ گروه دوران های صفحه دوبعدی است.

مثال ۵ : عمل گروه $O(2)$ روی فضای دوبعدی :
داریم: $M = R^2$ و $G = O(2)$. یادآوری می کنیم که $O(2)$ گروه ماتریس های دوبعدی متعامد است. دترمینان

این ماتریس ها می تواند یک یا منهای یک باشد. آنها که دترمینان یک دارند یک زیرگروه تشکیل می دهند که $SO(2)$ نامیده می شود. حال ماتریس $\pi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ را درنظرمی گیریم. این ماتریس درداخل $O(2)$ است ولی درخارج زیرگروه $SO(2)$ قرارمی گیرد. درواقع بقیه اعضای $O(2)$ را می توان به صورت πg نوشت که درآن $g \in SO(2)$. این حرف بدان معناست که گروه $O(2)$ از دوهم مجموعه تشکیل شده است، یعنی $O(2) = SO(2) \cup \pi SO(2)$.
هرعضو $\pi SO(2)$ روی R^2 به صورت یک دوران وسپس یک انعکاس عمل می کند.

مثال ۶ :عمل گروه $O(3)$ روی کره دوبعدی:

دراین مثال مجموعه M یک کره دوبعدی است که آن را با S^2 نشان می دهیم و G گروه ماتریس های متعامد سه بعدی است.

$$S^2 := \{r \in R^3 | r^t r = 1\} \qquad O(3) := \{g \in GL(3, R) | g^t g = I\}. \tag{10}$$

گروه $O(3)$ روی کره دوبعدی به صورت زیر عمل می کند:

$$r' \equiv \phi_g(r) = gr. \tag{11}$$

دراینجا منظور از gr واقعاً ضرب ماتریس مربعی سه بعدی g ازچپ در بردارستونی و سه بعدی r است.
گروه $O(3)$ نیز یک زیرگروه موسوم به $SO(3)$ دارد که از ماتریس های متعامد با دترمینان یک تشکیل شده است.
دردرس های بعدی نشان خواهیم داد که هرتبدیل $SO(3)$ روی فضای سه بعدی چیزی جز یک دوران نیست.
هردوران با یک محور $\hat{n}$ و یک زاویه θ مشخص می شود. به همین دلیل عناصر این گروه رامی توان به صورت $R_{\hat{n}}(\theta)$ نشان داد. به عنوان مثال تبدیلات زیر دوران های حول محورهای y, x و z را به اندازه زاویه θ نشان می دهند:

$$R_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$R_{\hat{y}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$R_{\hat{z}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

هرگاه ماتریس پاریته زیر را تعریف کنیم

$$\pi := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

که روی فضای سه بعدی بصورت انعکاس حول مبداء عمل می کند آنگاه می توان نوشت:

$$O(3) = SO(3) \cup \pi SO(3). \tag{16}$$

یعنی بقیه گروه $O(3)$ درحقیقت یک هم مجموعه راست زیرگروه $SO(3)$ برای عنصر پاریته خواهد بود.

مثال ۷ :عمل گروه اقلیدسی روی فضای اقلیدسی : گروه اقلیدسی E_n گروه تبدیلات دوران و انتقال روی فضای دکارتی R^n است. هرعمل گروه اقلیدسی با یک زوج (R,T) تعریف می شود که درآن R نشان دهنده دوران و T نشان دهنده انتقال است. هرزوج روی یک نقطه $x \in R^n$ به صورت زیرعمل می کند:

$$(R,T) : x \longrightarrow x' := Rx + T \tag{17}$$

بااستفاده از رابطه بالا می توان ضرب عناصر، عنصر یکه و وارون هر عنصر را درگروه E_3 را مشخص کرد:

$$(R,T)(R',T') = (RR', RT' + T), \qquad e = (I,0), \qquad (R,T)^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}T). \tag{18}$$

درقسمت بعدی این درس بعضی ازقضایای اساسی مربوط به عمل گروه روی مجموعه را بیان می کنیم. نخست به چند تعریف احتیاج داریم.

۳ بعضی از قضایای اساسی

تعریف : هرگاه نقطه ای مثل $x_0 \in M$ وجودداشته باشد به طوریکه $\forall g \in G \quad \phi_g(x_0) = x_0$ آنگاه این نقطه، نقطه ثابت عمل گروه روی M خوانده می شود.

مثال ۱ — درعمل گروه $O(3)$ روی فضای R^n، نقطه مبدا نقطه ثابت است. اماعمل همین گروه روی کره S^2 نقطه ثابت ندارد.

مثال ۲ —در عمل گروه $SO(2)$ یا دوران های حول محور z روی R^3 تمام نقاط محور z، نقاط ثابت هستند اما درعمل همین گروه روی کره دوبعدی قطب شمال و قطب جنوب نقاط ثابت هستند.

مثال ۳ — درعمل انتقال روی R_n نقطه ثابت وجود ندارد.

مثال ۴ — درعمل گروه تغییرمقیاس روی R_n، نقطه مبداء نقطه ثابت است.

قضیه: فرض کنیدکه $x \in M$ یک نقطه دلخواه از مجموعه M باشد وG روی M عمل کند. دراین صورت مجموعه عناصری از گروه G که نقطه x راثابت نگاه می دارند یک زیرگروه از G تشکیل می دهند. این زیرگروه زیرگروه ثابت کننده آن نقطه نامیده می شود.

اثبات : مجموعه این عناصررا با H_x نشان می دهیم:

$$H_x := \{g \in G | \phi_g(x) = x\}. \tag{19}$$

حال فرض کنیدکه $h, h' \in H_x$. دراین صورت بنابرتعریف $\phi_h(x) = x$ و $\phi_{h'}(x) = x$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\phi_{hh'}(x) = \phi_h(\phi_{h'}(x)) = \phi_h(x) = x. \tag{20}$$

هم چنین خواهیم داشت:

$$\phi_{h^{-1}}(x) = (\phi_h)^{-1}(x) = x. \tag{21}$$

پس $hh' \in H_x$ و $h^{-1} \in H_x$ و درنتیجه H_x یک زیرگروه G است.

تعریف : عمل یک گروه G روی یک مجموعه M تراگذار خوانده می شود هرگاه هردونقطه x, y از M را بتوان با عمل عضوی از گروه به یکدیگر نگاشت .

مثال ۱ : عمل گروه $SO(3)$ روی R^3 تراگذار نیست، زیرابردارهایی که طول های یکسان ندارند نمی توانند توسط این گروه به هم نگاشته شوند.

مثال ۲ : عمل گروه $SO(3)$ روی کره دوبعدی R^2 تراگذاراست زیرا هردونقطه ای روی کره را می توان با یک دوران حول محورمناسب و با زاویه مناسب به یکدیگر نگاشت.

مثال ۳ : یک گروه G می تواند به طرق مختلف روی خودش به عنوان یک مجموعه عمل کند. عمل از چپ چنین تعریف می شود:

$$L_g(a) := ga \quad \forall g, a \in G. \tag{22}$$

عمل از راست به طریق مشابه تعریف می شود:

$$R_g(a) := ag^{-1} \quad \forall g, a \in G. \tag{23}$$

عمل تزویج $adjoint \;\; action$ به طریق زیرتعریف می شود:

$$Ad_g(a) := gag^{-1} \quad \forall g, a \in G. \tag{24}$$

عمل های راست و چپ هردو بوضوح تراگذارهستند ولی عمل تزویجی چنین نیست زیرا نقطه e را با این عمل به هیچ نقطه دیگری جزخودش نمی توان نگاشت.

قضیه: هرگاه عمل یک گروه G روی یک مجموعه M تراگذارباشد آنگاه زیرگروه های ثابت کننده همه نقاط بایکدیگر یکسان هستند. این زیرگروه را با H نمایش می دهیم و آن را زیرگروه همسانگرد G می نامیم.

اثبات: فرض کنید که x و y دونقطه دلخواه از M باشند. می خواهیم یک یکسانی بین H_x و H_y برقرارکنیم. چون عمل G روی M تراگذاراست حتماً عنصری مثل $a \in G$ وجود دارد به نحوی که $y = ax$ و $x = a^{-1}y$. حال نگاشت زیر را بین H_x و H_y تعریف می کنیم:

$$\psi : H_x \longrightarrow H_y, \qquad \psi(g) := aga^{-1}. \tag{25}$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\psi(g)y = (aga^{-1})y = (ag)(a^{-1}y) = (ag)x = a(gx) = ax = y. \tag{26}$$

پس $\psi(g)$ واقعاً عضو H_y است. علاوه براین

$$\psi(gg') = agg'a^{-1} = aga^{-1}ag'a^{-1} = \psi(g)\psi(g'). \tag{27}$$

پس ψ یک همسانی است.

حال باید ثابت کنیم که این نگاشت یک به یک و پوشاست. برای اثبات پوشا بودن توجه می کنیم که اگر $h \in H_y$ آنگاه

$$hy = y \longrightarrow h(ax) = (ax) \longrightarrow hax = ax \longrightarrow (a^{-1}ha)x = x \longrightarrow a^{-1}ha \in H_x, \tag{28}$$

ودرنتیجه بدست می آوریم:

$$y = \psi(a^{-1}ha). \tag{29}$$

برای اثبات یک به یک بودن می بایست ثابت کنیم که $Ker(\psi)\{e\}$.
برای این کار فرض کنیدکه $\psi(g \in H_x) = e$. درنتیجه بدست می آوریم

$$aga^{-1} = e \longrightarrow g = e. \tag{30}$$

که آنچه را می خواستیم ثابت می کند.

قضیه: هرگاه عمل یک گروه G روی یک مجموعه M تراگذارباشد آنگاه:

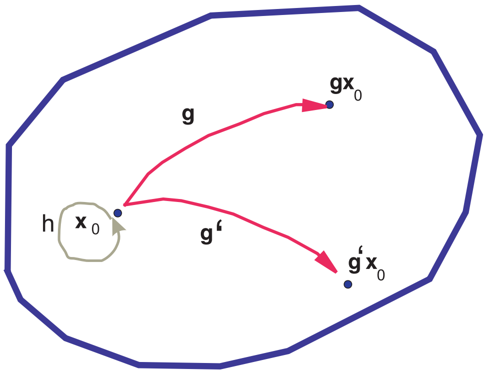
بین G/H به عنوان یک مجموعه و M به عنوان یک مجموعه تناظریک به یک برقراراست.

می خواهیم یک تناظریک به یک از G/H به M برقرارکنیم. دقت کنید که M ساختمان گروه ندارد و بنابراین نمی توان راجع به شباهت ساختاری این دوصحبت کرد مگر درمواقعی که M خود یک گروه باشد.
نقطه ای از مجموعه M مثل x_0 درنظر می گیریم. زیرگروه ثابت کننده‌ی این نقطه برابر است با $H_{x_0} = H$. حال به ازای هر g که از گروه نقطه‌ی gx_0 را از M مشخص می‌کنیم. به عبارت دیگر هر g از گروه را به نقطه‌ی gx_0 از M می نگاریم. اما دقت می کنیم که نقطه های g و gh که درآن $h \in H_{x_0}$ هردو یک نقطه از M را بدست می دهند، زیرا

$$(gh)x_0 = g(hx_0) = gx_0. \tag{31}$$

بنابراین هر هم مجموعه‌ی H_{x_0} یعنی هر عضو $G/H_{x_0} = G?H$ به یک نقطه از مجموعه‌ی M نگاشته می شود.
حرف های شهودی بالا را می توان به زبان دقیق ریاضی نیز بیان کرد. نگاشت زیر را تعریف می کنیم.

$$\phi : G/H \longrightarrow M, \quad \phi[a] := ax. \tag{32}$$



شکل ۲: هر عضو از گروه مثل g یک نقطه از M مثل gx_0 را مشخص می کند. دو عضو از یک هم مجموعه‌ی H_{x_0} مثل g و gh هردو یک نقطه را بدست می دهند.

نخست نشان می دهیم که این نگاشت خوش تعریف است و طرف راست بستگی به انتخاب نماینده کلاس $[a]$ ندارد. این خاصیت بدیهی است زیرا اگر $a \equiv a'$ آنگاه نتیجه می گیریم که $a' = ah$ که درآن $h \in H$ عضوی از زیر گروه همسانگرد است: بنابراین

$$a'x = ahx = ax. \tag{33}$$

سپس نشان می دهیم که این نگاشت یک به یک است، زیرا

$$\phi[a] = \phi[b] \longrightarrow ax = bx \longrightarrow b^{-1}ax = x \longrightarrow b^{-1}a \in H \longrightarrow a \equiv b \longrightarrow [a] = [b]. \tag{34}$$

و بالاخره نشان می دهیم که این نگاشت پوششی است ، زیرا به ازای هرنقطه $y \in M$ با توجه به تراگذاربودن عمل گروه روی مجموعه داریم $y = ax$ که درآن a عضوی از گروه است. بنابراین $y = \phi[a]$ و درنتیجه نگاشت وارون پذیراست. دراینجا اثبات قضیه کامل شده است و داریم $G/H \equiv M$.

مثال ۱ — گروه $SO(3)$ روی کره دوبعدی S^2 عمل تراگذاردارد. زیرگروه همسانگرد $SO(3)$ یعنی زیرگروهی که یک نقطه مثلاً قطب شمال را ثابت نگاه می دارد برابراست با $SO(2)$. بنابراین خواهیم داشت:

$$SO(3)/SO(2) \sim S^2. \tag{35}$$

این مثال باهمین استدلال به ابعادبالاترتعمیم می یابدیعنی

$$SO(n)/SO(n-1) \sim S^{n-1}. \tag{36}$$

مثال ۲ — کره سه بعدی S^3 را با تعریف زیردرنظربگیرید:

$$S^4 := \{(z_1, z_2)|, \quad z_1, z_2 \in C, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}. \tag{37}$$

گروه $U(2)$ روی این کره به شکل زیر عمل می کند:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

که درآن $g \in U(2)$. باتوجه به رابطه $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \begin{pmatrix} z_1{}^* & z_2{}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ درمی یابیم که گروه $U(2)$ گروه تبدیل از S^3 به S^3 است. هم چنین بسادگی معلوم می شود که عمل این گروه روی S^3 تراگذاراست. برای پیداکردن زیرگروه همسانگرد یک نقطه مثل $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ را درنظر می گیریم. کمی محاسبه نشان می دهد که زیرگروه همسانگرد عبارت است از:

$$H = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad | \ \theta \in [0, 2\pi]\} \sim U(1). \tag{39}$$

باتوجه به قضیه قبل نتیجه می گیریم که

$$U(2)/U(1) \sim S^3. \tag{40}$$

این مثال باهمین استدلال به ابعاد بالاتر تعمیم پیدامی کند، یعنی

$$U(n)/U(n-1) \sim S^{2n-1}. \tag{41}$$